

## 2.7. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости

Уравнения движения (Эйлера) следующие:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{dU_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{dU_y}{dt}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dU_z}{dt},$$

где  $U_x, U_y, U_z$  - проекции скоростей;  $\frac{dU_x}{dt}, \frac{dU_y}{dt}, \frac{dU_z}{dt}$  - проекции ускорений.

Четвертым уравнением для решения системы (имеем четыре неизвестных параметра:  $P, U_x, U_y, U_z$ ) является дифференциальное уравнение неразрывности капельной жидкости, имеющее вид

$$\frac{dU_x}{dx} + \frac{dU_y}{dy} + \frac{dU_z}{dz} = 0.$$

## 2.8. Уравнение Бернулли

Интегрируя уравнения (2.16) для установившегося движения, в поле силы тяжести получится уравнение Бернулли элементарной струйки идеальной капельной жидкости:

$$Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = Const, \quad (2.17)$$

где  $Z$  – геометрическая высота центра тяжести произвольно выбранного живого сечения струйки над плоскостью сравнения 0-0 (Рис2.14);  $P/\rho g$  – пьезометрическая высота отвечающая гидродинамическому давлению  $P$  в центре тяжести сечения струйки;  $U^2/2g$  – скоростная высота, отвечающая скорости  $U$  в центре тяжести сечения струйки.

Геометрический смысл уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости поясняется рисунком 2.14. Уравнение Бернулли для произвольно выбранного сечения потока идеальной жидкости имеет вид:

$$Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} = Const, \quad (2.18)$$

где  $V$  – средняя скорость потока в данном живом сечении;  $\alpha$  – коэффициент учитывающий неравномерность распределения скоростей частиц жидкости по живому сечению потока.

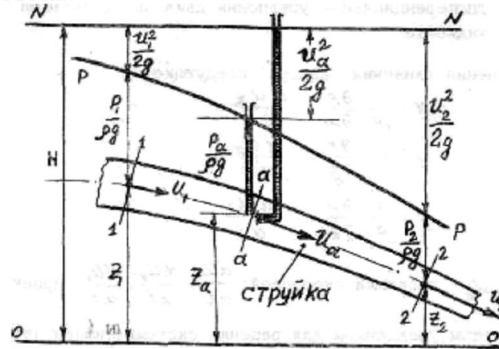


Рис.2.14.

Уравнение Бернулли для двух сечений потока реальной жидкости примет вид:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_{\alpha_{1-2}}, \quad (2.19)$$

где  $h_{\alpha_{1-2}}$  – сумма потерь напора между двумя сечениями.

Геометрический смысл уравнения Бернулли (2.19) поясняется рисунком 2.15.

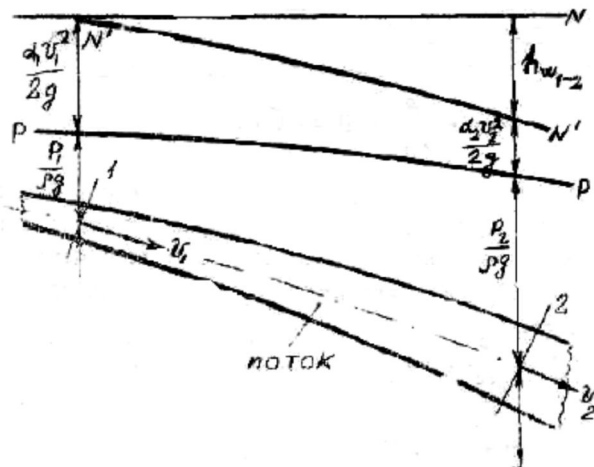


Рис.2.15.

С энергетической точки зрения уравнения Бернулли выражают закон сохранения энергии применительно к движению жидкости.

Сумма трех слагаемых уравнения Бернулли представляет полную энергию единицы веса жидкости в данном сечении, называемую удельной энергией:

$Z$  - удельная потенциальная энергия положения;  $\frac{P}{\rho g}$  - удельная потенциальная энергия давления;  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  - удельная кинетическая энергия;  $h_w$  - суммарные потери удельной энергии.

Уравнение Бернулли для газов зависит от характера термодинамического процесса (1.10 - 1.13), так как  $\rho=f(P)$ .

В общем случае (политропический процесс)

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{n}},$$

а уравнение Бернулли будет

$$Z_1 + \frac{n}{n-1} \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{n}{n-1} \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} + h_{w1-2}, \quad (2.20)$$

или с учетом (1.9)

$$Z_1 + \frac{1}{g} \frac{n}{n-1} RT_1 + \frac{U_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{1}{g} \frac{n}{n-1} RT_2 + \frac{U_2^2}{2g} + h_{w1-2}. \quad (2.21)$$

При адиабатическом процессе в уравнениях (2.20) и (2.21)  $n=k$ . При изотермическом процессе ( $T = \text{Const}$ )  $P = \rho RT = \text{Const}$ .

$$RT_0 \ln \frac{P_1}{P_0} + \frac{U_1^2}{2} = RT_0 \ln \frac{P_2}{P_0} + \frac{U_2^2}{2} + gh_{w1-2}. \quad (2.22)$$

На практике величиной  $\Delta Z = Z_1 - Z_2$  пренебрегают. Тогда для адиабатического процесса без учета потерь получим

$$T_1 - T_2 = \frac{k-1}{kR} \left( \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} \right). \quad (2.23)$$

Существует соотношение

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dS} = \frac{dU}{dS} (M^2 - 1) \frac{1}{U}, \quad (2.24)$$

где  $A$  - площадь живого сечения;  $U$  - скорость газа;  $a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$  - скорость звука в газе;  $M = \frac{U}{a}$  - число Маха.

Из (2.24) следует:

1. Если  $U < a$  (дозвуковая скорость), то  $M < 1$ ,  $(M^2 - 1) < 0$ .  
При  $\frac{dA}{dS} > 0$   $\frac{dU}{dS} < 0$  - это значит, что при увеличении площади живого сечения скорость газа уменьшается, как и в случае капельной жидкости.
2. Если  $U > a$  (сверхзвуковая скорость), то  $M > 1$ ,  $(M^2 - 1) > 0$ .  
При  $\frac{dA}{dS} > 0$   $\frac{dU}{dS} > 0$ , т.е. при увеличении площади живого сечения

скорость газа увеличивается в отличие от случая капельной жидкости.

## 2.9. Режимы движения жидкости

Опыты показывают, что существуют два режима течения жидкостей и газов: ламинарное течение (слоистое), при котором отдельные струи жидкости при движении не смешиваются между собой и течение протекает без пульсаций скоростей частиц; турбулентное течение, при котором струи жидкости интенсивно и беспорядочно перемешиваются и имеет место пульсация местных скоростей.

Режимы движения можно наблюдать на установке (рис.2.16).

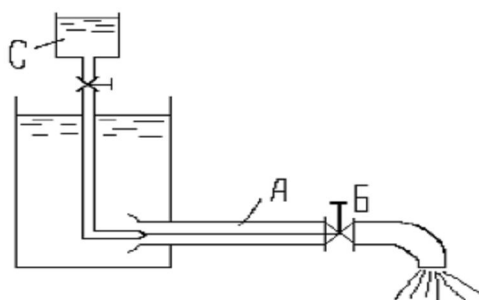


Рис.2.16.

Жидкость течет в стеклянной трубе А со скоростью, регулируемой краном В, В поток жидкости запускается тонкая струя окрашенной жидкости из бачка С. До некоторой скорости течения эта струя течет, не смешиваясь с жидкостью, что говорит о ламинарном течении. С увеличением скорости наступает момент, когда ламинарный режим переходит в турбулентный, начинается перемешивание окрашенной струи с жидкостью. Скорость, при которой происходит смена режимов течения, называется критической –  $V_{кр}$ .

Установлен безразмерный критерий (параметр), названный числом Рейнольдса (Re). В частности, для труб круглого сечения

$$Re = \frac{Vd}{\nu}, \quad (2.25)$$

где V - средняя скорость потока; d - диаметр трубы;  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости.

Ламинарный режим течения сохраняется до критического значения числа Рейнольдса, равного

$$Re_{кр} = 2320.$$

При  $Re > 2320$  начинается образование возмущений, т.е. турбулентный режим. Следовательно, критическая скорость равна:

$$V_{кр} = Re \frac{V}{d}$$

## 2.10. Гидравлические сопротивления и потери напора

Из уравнения Бернулли для потока реальной жидкости (2.19) следует, что при равномерном изотермическом движении (силы инерции отсутствуют,  $V_1 = V_2$ , вязкость постоянна)

$$h_{w1-2} = \left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right). \quad (2.26)$$

В горизонтальных трубах ( $Z_1 = Z_2$ ):

$$h_{w1-2} \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\Delta P}{\rho g}, \quad (2.27)$$

где  $\Delta P$  - потери давления по длине  $l$  между сечениями.

При гидравлических расчетах насосных установок гидроприводов и систем гидроавтоматики необходимо определить величину потерь с целью подбора источника питания гидросистем, способного создать потребное давление.

Потери напора (давления) делят на два вида:

1) потери напора по длине потока –  $h_l$ ;

2) местные потери –  $h_m$ , которые возникают при изменении конфигурации потока, деформации эпюры распределения скоростей, завихрениях, что приводит к дополнительному расходу энергии. Например, краны, повороты, диафрагмы, клапаны и т.д. Суммарные потери будут

$$\Sigma h_w = \Sigma h_l + \Sigma h_m. \quad (2.28)$$

рис.2.17 и 2.18 показаны величины потерь по длине и в местном сопротивлении согласно (2.27).



Рис.2.17.

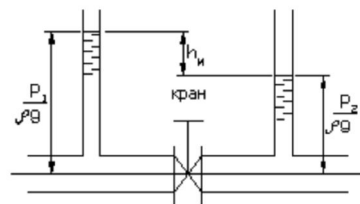


Рис.2.18.